

## EL TEMPERAMENTO DE NASSARRE: ESTUDIO MATEMÁTICO

Revista de Musicología XXII, 1

Miguel BERNAL RIPOLL

**Resumen:** *Se describe el temperamento para órganos y claves descrito por Pablo Nassarre en su Escuela Musica. Puesto que en dicho temperamento sólo se indican cuatro terceras puras, se intenta mediante razonamientos matemáticos determinar si posibilitaría el doble uso de las notas SOL#-LAB y Mib-RE#.*

### NASSARRE'S TUNING A MATHEMATIC STUDY

**Summary:** This article analyses the tuning instructions for organ and key board described by Pablo Nasarre in his *Escuela Musica*. Since in this work only four pure thirds are indicated, I investigate by means of mathematical reasoning if such tuning allowed the double use of notes SOL#-Lab and Mib-RE#.

### Introducción

Uno de los problemas que se presentan en la praxis de la música antigua para tecla es el de la elección del temperamento adecuado. Entre 1500 y 1800, a medida que avanza y se amplía la teoría armónica, se buscan nuevas maneras de afinar los instrumentos de tecla. En cada momento el temperamento es un compromiso entre una afinación ideal y su realización práctica, debido a la restricción que supone el que las teclas negras deban tener la doble función de sostenidos y bemoles. Unas veces se preferirá la pureza en la afinación, pero otras se sacrificará ésta para tener la posibilidad del doble uso de las teclas negras. Acertar con el temperamento adecuado será importante para expresar mejor el espíritu de la música de un momento dado.

Especial problema presenta la música ibérica del siglo XVII. Por un lado empiezan a aparecer más alteraciones accidentales, principalmente RE# y

Ab<sup>1</sup>. Por otro, la música sigue en muchos casos sin despegarse del todo de antiguos esquemas armónicos que parecen demandar una afinación más arcaica a la justa. En el clave hay una solución sencilla: puesto que nunca se emplean RE# y MIb en una misma pieza<sup>2</sup>, basta con modificar la afinación correspondiente a dicha tecla, lo que se puede hacer en un par de minutos. Pero entendiendo que en el órgano no se pueden corregir sencilla y reversiblemente como en un clave la afinación de las notas y que los instrumentos en teclas dobles para estas notas no serían la generalidad, pensamos que en esta época debería emplearse ya un sistema que permitiera el doble uso de las teclas correspondientes a las notas citadas, es decir, que la tecla del MIb tuviera como RE# y la del SOL# como LA<sup>3</sup>.

El temperamento descrito por Fray Pablo Nassarre en su *Escuela Música* es quizás el único descrito en nuestro país después de los teóricos del siglo XVI (Salinas). Aunque la *Escuela Música* está publicada en 1723, se supone concebida en el siglo XVII<sup>4</sup>, por lo que éste sería el único temperamento que hemos descrito para la música ibérica del periodo que podría comprender época desde Bruna a Cabanilles. Puesto que Nassarre no especifica la magnitud exacta del temperamento de las quintas, podemos encontrar varias soluciones posibles. Dos cuestiones se nos presentan en este momento:

- ¿Podemos encontrar una formulación más precisa de dicho temperamento?
- ¿Es posible con las instrucciones de Nassarre encontrar una solución para disponer de RE# y LA<sup>5</sup>?

A lo largo de este artículo intentaremos contestar ambas preguntas, para lo que nos apoyaremos en la descripción matemática del temperamento que se deduce de las instrucciones de Nassarre, y en los límites que puede tener la esafinación<sup>6</sup> de los intervalos, principalmente las quintas y las terceras mayores SI-RE# y LA<sup>7</sup>-DO.

<sup>1</sup> Por ejemplo, el 20 % de las obras de Cabanilles no serían factibles en un instrumento afinado con temperamento mesotónico clásico. En 44 de sus 213 obras largas (tientos, diferencias y tocatas) se usan notas no posibles en dicho temperamento: en 29 aparece el RE#, en 15 el LA<sup>8</sup>, en 5 el LA# y una el REb.

<sup>2</sup> Según el mismo Nassarre (*Escuela Musica*, parte I p. 316, *Escuela Musica*, parte II p. 369), en un determinado sólo se pueden hacer tres sostenidos y un bemol: fa#, do#, sol# y sib en los tonos sin alteraciones en la armadura. Esto limita el sistema a sólo once notas: do-do#-re-mi-fa-fa#-sol-sol#-la-si. En tonos con alteraciones en la armadura habría que trasponer esta situación. Según esta teoría, rara coexisten notas enarmónicas. Aunque algunos compositores de fines del siglo XVII (Cabanilles, Iba) empiezan a transgredir esta norma, excediendo estos límites (es corriente llegar hasta un bemol más), nunca encontraremos en una misma pieza el Sol# y el La<sup>9</sup>, el Re# y el Mi<sup>10</sup>, etc.

<sup>3</sup> Parece un poco rebuscado admitir que en casos de templos en que había varios órganos, cada uno tuviera la partición de un modo, de manera que uno permitiera el RE# y el otro el Mi<sup>11</sup>, etc.

<sup>4</sup> Ver prólogo de Lothar Siemens a la edición facsímil de 1980, por la Institución Fernando el Católico.

A continuación, transcribimos literalmente la descripción de Nassarre para hacer la partición de la octava, que se halla en el Capítulo XX del Libro IV de la Primera Parte de la *Escuela Música*, "En que se trata de la afinacion de los Organos en toda especie de cañuteria":

"Para afinar un Organo, como se deve, despues de compuesta su Cañuteria, podrá observar el Artifice las reglas que dirè. Ha de procurar, primera mente ponerlo en el tono natural, en el qual ha de poner el caño del flautado, que le toca al segundo *gesolreut*, contando por la parte baxa del Organos; y en la suposicion que se le ha de dar un poquito mas de *longitud* à todos los caños quando se fabrican, se ha de ir alcorzando el que he dicho, hasta que vaya subiendo el tono, y estè fino con el natural. Y prosiguiendo todo el flautado (como el mas principal registro de todos) se ha de afinar la *quinta de gesolreut* con el, que es *delasolre*, y despues que este fina todo lo possible, se ha de abaxar un poquito, de modo que no sea notable, y esta diligencia se ha de hazer en todas las demàs quintas que despues se afinaren.

Fino ya el caño de *delasolre*, se ha de afinar con el mismo de *gesolreut* el de *befabemi* blanco, que es *tercera mayor*. Despues se ha de afinar con *delasolre* (que quedó ya afinado) su octava *àzia* baxo, y con este despues que estè, su *tercera mayor*, que es el sostenido de *fefaut*. A quien le seguirá la *quinta*, que es *alamirre*. Con *alamirre* se ha de afinar su *tercera mayor*, que es el sostenido de *cesolfaut*; y despues la *quinta*, que es *elami*. Con este se ha de afinar su octava por abaxo, para poder afinar despues su *tercera mayor*, que es el sostenido de *gesolreut*.

Afinado ya todo esto, se ha de bolver a *gesolreut*, que es el primero que se puso en tono, y afinar su octava arriba con el, con quien se ha de afinar despues su *quinta* abaxo (que es *cesolfaut* el que esta en medio del Organos) subiendola cosa muy poca, despues que estè fina. Con este *cesolfaut* se ha de afinar su quinta abaxo (que es *fefaut*) subiendola como la otra un poquito, de modo que no sea notable. Y con esta se ha de afinar el otro *fefaut* (que es su octava por arriba para poder despues afinar su *quinta* por abaxo, que es el *bemol de befabemi* con quien se ha de afinar despues el *bemol de elami*, que es su *quinta* por abaxo, y despues su octava.

Afinadas todas estas en la conformidad que he dicho, las demàs se han de afinar con sus octavas..."<sup>5</sup>.

Los pasos en la realización del temperamento son, pues, los siguientes:



<sup>5</sup> Respetamos la ortografía original. NASSARRE, Pablo: *Escuela de Música*. Primera parte. Libro IV. cap. XX n. 497

La nota negra indica la nota a partir de la cual se obtiene la nota blanca, afinando o temperando (se omiten los saltos de octava necesarios).

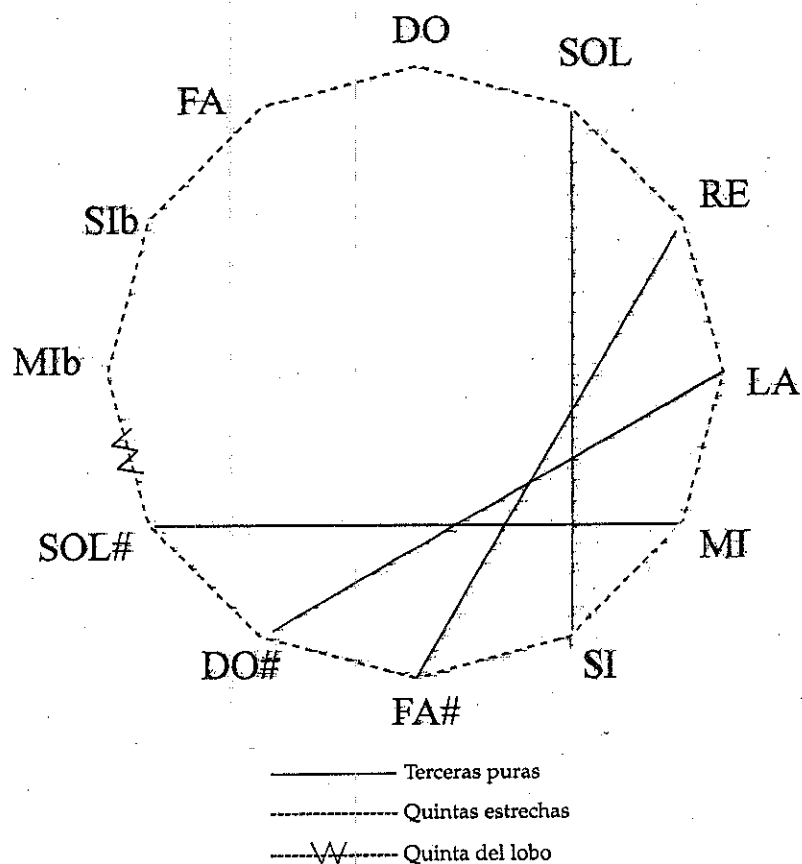
Resultado:

- Cuatro terceras justas: SOL-SI, RE-FA#, LA-DO#, MI-SOL#.

- 11 quintas algo mejores que justas, sin especificar la magnitud de la reducción. Siete se afinan directamente: SOL-RE, RE-LA, LA-MI, DO-SOL, FA-DO, SIb-FA, MIb-SIb. Las otras tres resultan por la traslación de las cuatro primeras que se han enumerado una tercera mayor más alta, al afinar por terceras: SI-FA#, FA#-DO#, DO#-SOL#. Una quinta más queda también menor que justa, como veremos más tarde: la quinta MI-SI, que resulta de afinar el MI desde el SOL por quintas (SOL-RE-LA-MI) y el SI como tercera justa del SOL.

-Una "quinta del lobo": SOL#-MIb, que acumulará la desafiación debida al temperamento de las quintas.

En forma gráfica:



Al no especificar Nassarre la magnitud de la desviación de las quintas, caben diversas posibilidades. A lo largo de este artículo utilizaremos las matemáticas para establecer las distintas soluciones al problema.

La quinta MI-SI se ha formado afinando el SI como tercera pura del SOL, y el MI como tercera quinta consecutiva desde el SOL (SOL-RE-LA-MI). Si hubiéramos afinado con quintas puras, la tercera SOL-SI sería pitagórica, y por lo tanto una coma sintónica mayor que pura. Pero como hemos afinado esta tercera pura, las quintas entre SOL y SI tienen que estar reducidas, para repartir la coma entre ellas. Las quintas SOL-RE-LA-MI se "abaxan un poquito", y consecuentemente la quinta MI-SI estará temperada una coma sintónica menos la suma de lo que hayamos temperado las quintas SOL-RE-LA-MI. Esto encontrará su formulación matemática más adelante.

Como veremos más tarde, si las quintas se temperan exactamente  $1/4$  de coma sintónica, obtendremos como solución trivial el *temperamento mesotónico clásico de terceras mayores puras*. Para ello, basta comprobar que las terceras DO-MI, FA-LA, SIb-RE y MIb-SOL son puras, y si esto no es así corregir las quintas hasta que se cumpla. Sin embargo, Nassarre no parece pretender más terceras puras, ni habla de corregir las quintas.

### Cuantificación de los resultados

Vamos a formular las distancias al Sol de partida. Haremos los cálculos en Cents<sup>6</sup>, lo que simplifica los cálculos, pues trabajando con cents utilizamos sólo sumas y restas. Por supuesto nos quedarán unas incógnitas, que corresponderán a la magnitud del temperamento de las quintas.

Sea X la magnitud en cents de la 5ª Justa, Y la 3ª Justa y Z la 8ª. Sea  $h_i$  el temperamento de cada quinta ( $i=1, 2, 3, \dots, 7$ , para las quintas Sol-Re, Re-La, La-Mi, Sol-Do, Do-Fa, Fa-Sib y Sib-Mib). Así, la magnitud de una quinta en este temperamento será  $X-h_i$ .

Obtenemos cada nota a partir del Sol, subiendo o bajando quintas, terceras u octavas. Cuando el intervalo es ascendente sumamos su valor, cuando es descendente lo restamos, por lo que las notas inferiores al SOL tendrán valor negativo. Se han agrupado ya los valores de las  $h_i$  en los resultados.

<sup>6</sup> Al final del artículo se incluye una nota sobre la medida de los intervalos en cents.



- [1] SOL: 0 (Punto de partida)
- [2] RE:  $X-h_1-Z$
- [3] SI:  $Y$
- [4] FA#:  $X-h_1-Z+Y$
- [5] LA:  $2X-h_1-h_2-Z$
- [6] DO#:  $2X-h_1-h_2-Z+Y$
- [7] MI:  $3X-h_1-h_2-h_3-2Z$
- [8] SOL#:  $3X-h_1-h_2-h_3-2Z+Y$
- [9] DO:  $-X+h_4$
- [10] FA:  $-2X+h_4+h_5+Z$
- [11] SIb:  $-3X+h_4+h_5+h_6+2Z$
- [12] Mib:  $-4X+h_4+h_5+h_6+h_7+3Z$

Sería más cómodo tener las distancias desde el DO, en lugar de desde el SOL. Si queremos las distancias desde el Do, a estos valores tenemos que sumarle la distancia del Do al Sol:  $X-h_4$ . Sumando, pues, esta cantidad a las expresiones [1] a [12] Obtendremos los siguientes resultados:

- [13] DO: 0
- [14] DO#:  $3X-h_1-h_2-h_4-Z+Y$
- [15] RE:  $2X-h_1-h_4-Z$
- [16] Mib:  $3Z-3X+h_5+h_6+h_7$
- [17] MI:  $4X-h_1-h_2-h_3-h_4-2Z$
- [18] FA:  $Z-X+h_5$
- [19] FA#:  $2X-h_1-h_4-Z+Y$
- [20] SOL:  $X-h_4$
- [21] SOL#:  $4X-h_1-h_2-h_3-h_4-2Z+Y$
- [22] LA:  $3X-h_1-h_2-h_4-Z$

$$[23] \text{ SIb: } 2Z-2X+h_5+h_6$$

$$[24] \text{ SI: } X-h_4+Y$$

Estos son los intervalos expresados en cents. Los valores de los intervalos justos (redondeados para X e Y) son los siguientes:

$$[25] \quad X=702$$

$$[26] \quad Y=386,30$$

$$[27] \quad Z=1200$$

Pero no sabemos la magnitud exacta del temperamento de las quintas, puesto que Nassarre sólo dice "abaxarlas un poco", sin especificar la magnitud de esta reducción. Ante esto caben varias posibilidades que expondremos a continuación.

### Quintas temperadas por igual. Quinta MI-SI soportable

Supongamos que todas las quintas temperadas directamente son iguales, pero la quinta MI-SI, que resulta de afinar el MI desde el SOL por quintas (SOL-RE-LA-MI) y el SI como tercera justa del SOL, no tendrá necesariamente que ser igual a las que temperamos directamente.

[28]  $h$ : magnitud con la que se temperan las quintas SOL-RE, RE-LA, LA-MI, SOL-DO, DO-FA, FA-SI, SI-MI (h= $h_1=h_2=h_3=h_4=h_5=h_6=h_7$ )

[29]  $h_{\text{MI-SI}}$ : magnitud con la que resultará temperada la quinta MI-SI

Vamos a ver qué soluciones hay, para lo que en primer lugar debemos establecer qué límites debe tener este temperamento para que sea "soportable". Dicho de otra forma, qué valor máximo o mínimo podrá tener la desviación de las quintas justas.

Antes, formularemos la magnitud de la quinta MI-SI, que no se obtiene directamente, puesto que el MI se obtiene como 3ª quinta consecutiva del SOL (bajando después dos octavas), y el SI como su tercera justa. La distancia entre ambos se obtiene restando las expresiones [24] y [17], agrupando y simplificando las  $h_i$ :

$$\text{MI-SI: } 2Z+Y-3X+3h \quad [30]$$

Sustituyendo el valor de las constantes, dado en [25], [26] y [27]:

$$\text{MI-SI: } 680,3+3h \quad [31]$$

La diferencia de esta quinta con una quinta justa será el resultado de restar esta cantidad al valor de la quinta justa,  $X=702$ , con lo que obtenemos que la quinta MI-SI estará temperada en el valor siguiente:

$$\text{Temperamento de MI-SI: } h_{\text{MI-SI}} = 21,7-3h \quad [32]$$

Ahora, consideremos que el valor máximo que puede tomar el temperamento de una quinta para que esta sea soportable al oído es de  $1/3$  de coma sintónica (como en el temperamento mesotónico de terceras menores), es decir, aproximadamente 7 cents. Aunque se trata de una apreciación subjetiva, la tomaremos como hipótesis de trabajo. Kirnberger y Neidhart dan en algunos temperamentos hasta  $1/2$  de coma, es decir, 11 cents. Pero tomaremos como límite 8 cents, que es el temperamento de las quintas en un temperamento de Marpurg ( $1/3$  de coma Pitagórica).

Tanto la quinta MI-SI como las otras temperadas directamente no deben exceder esta cantidad. Matemáticamente, este postulado se traduce en las dos inecuaciones siguientes:

$$h < 8 \quad [33]$$

$$h_{\text{MI-SI}} < 8, \text{ es decir, } 21,7-3h < 8 \quad [34]$$

La inecuación [34] se puede expresar de forma que  $h$ , variable que indica el valor del temperamento de las quintas temperadas directamente, quede despejada:

$$4,57 < h \quad [35]$$

Combinando [33] y [35], obtenemos:

$$4,75 < h < 8 \quad [36]$$

El valor del temperamento de las quintas debe estar entre 4,75 y 8 cents, que corresponden aproximadamente a  $1/3$  y  $1/5$  de coma respectivamente. Si temperamos las quintas con un valor "mejor" que ese  $1/5$  de coma, tendremos una quinta MI-SI más desafinada.

### Temperamento mesotónico clásico

Nótese que, como hemos dicho más arriba, el temperamento mesotónico clásico de  $1/4$  de coma entraría dentro de dicho margen. Efectivamente, si temperáramos todas las quintas  $1/4$  de coma sintónica, obtendríamos dicho temperamento (matemáticamente, significa que hacemos  $h=5,375$ ). Para obtenerlo desde el punto de vista práctico debemos comprobar que la quinta MI-SI ha quedado igual de temperada que las que se han temperado directamente, y si no corregir las anteriores hasta conseguirlo. Así aseguramos la coma sintónica dividida entre esas cuatro quintas. También las quintas restantes deberán temperarse  $1/4$  de coma. Obtendremos además las terceras justas FA-LA, SI $\flat$ -RE y MI $\flat$ -SOL.

### Posibilidad de disponer de RE# y LA $\flat$

Nassarre no parece buscar expresamente este temperamento: a) No dice para nada que se compruebe la quinta MI-SI $\flat$  las notas FA, SI $\flat$  y MI $\flat$  las habría obtenido como terceras justas de LA, RE y SOL directamente si hubiera querido que así fuera. Aprovechando esto, queremos determinar si dentro de los márgenes del temperamento descrito por Nassarre entraría la posibilidad de que el MI $\flat$  y el SOL# nos sirvan como RE# y LA $\flat$  respectivamente. Seguimos suponiendo la misma magnitud para el temperamento de las quintas (las que se temperan directamente, claro está).

Veamos las distancias SI-RE#(MI $\flat$ ) y LA $\flat$ (SOL#)-DO, que se obtienen restando el valor de las notas extremas dadas por las expresiones correspondientes, respectivamente [16] menos [24] y [13] menos [21], además de sumar Z (pues hemos de subir una octava la nota del extremo):

$$\text{SI-RE\#(MI\flat): } (3Z-3X+3h)-(X-h+Y-Z)=3Z-4X-Y+4h=405,7+4h \quad [37]$$

$$\text{LA\flat(SOL\#)-DO: } Z-(4X-4h-2Z+Y)=4Z-4X-Y+4h=405,7+4h \quad [38]$$

Puesto que  $h$  debe tener un valor entre 4,57 y 8, según la expresión [36], las terceras anteriores tendrán una magnitud entre 423,98 y 437,70. Es decir, que la desviación de la tercera justa (cuyo valor es 386,30 Cents) será de 42,68 a 51,40. Esto es demasiada desviación para una tercera mayor. Es más del doble de lo que se desvía una tercera pitagórica (407,8 Cents, 22 cents más que pura), que es lo máximo que se suelen desviar algunas terceras en temperamentos irregulares como los de Werckmeister o Vallotti).

Haremos el camino a la inversa. Queremos que las terceras en cuestión no sean mayores que una tercera pitagórica. Si a las ecuaciones [37] y [38], de idéntico resultado, restamos el valor de la tercera justa (386,30 cents), obtenemos la magnitud en la que las terceras SI-RE# y LA -DO exceden de la tercera pura:

$$19,4+4h \quad [39]$$

Para que el valor de las terceras en cuestión no sea mayor que el de una tercera pitagórica (máximo valor soportable), la expresión anterior [39] debe ser menor que 22 cents, es decir

$$19,4+4h < 22 \quad [40]$$

Despejando

$$h < 0,65 \quad [41]$$

Pero con ese valor de  $h$  (sustituyéndolo en la ecuación [32]) obtendríamos una serie de resultados contradictorios con nuestro punto de partida:

a) La quinta MI-SI será 19,75 cents menor que pura: casi una coma, lo que juzgamos excesivo (recordemos la expresión [35]).

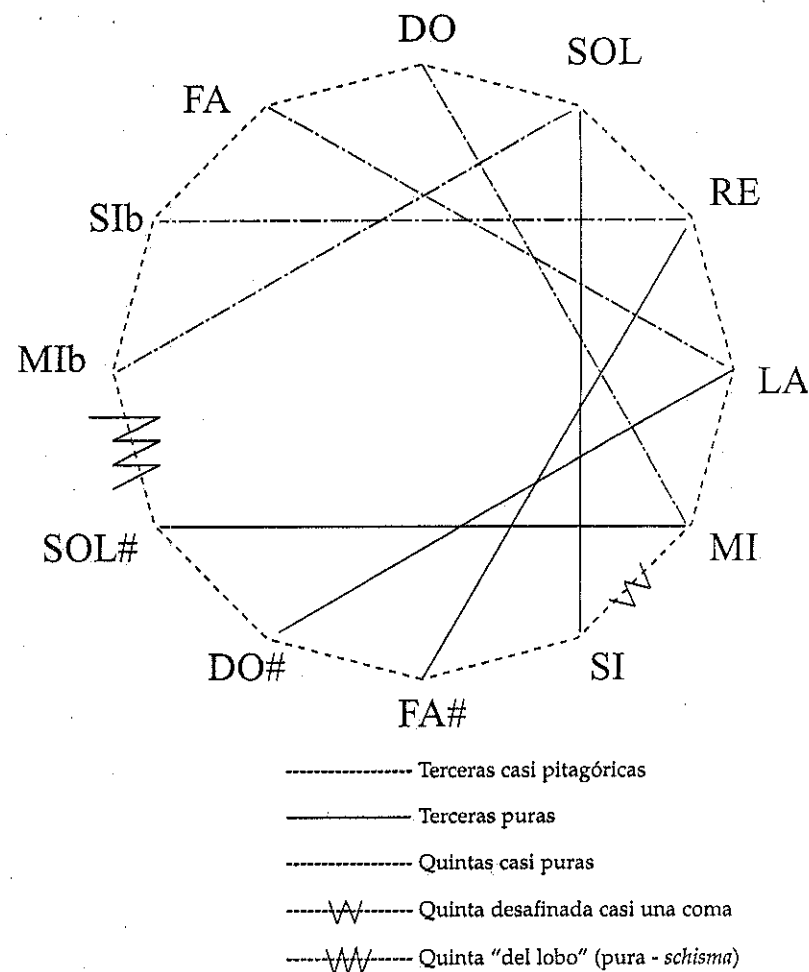
b) La quinta "del lobo" no sería tal, quedaría casi pura, solo aumentada de 2,25 Cents (aproximadamente un *schisma*, que es la diferencia entre las comas sintónica y pitagórica).

$$\begin{aligned} \text{Quinta SOL\#-MIb: } [-4X+h_4+h_5+h_6+h_7+3Z] - [3X-h_1-h_2-h_3-2Z+Y] = \\ = 5Z-7X-Y+7h = 704,25 \end{aligned} \quad [42]$$

c) Prácticamente, un temperamento de las quintas de 0,65 no es perceptible: pensemos que en el temperamento igual las quintas se desvían aproximadamente 2 cents. El resultado es similar al de hacer las quintas justas, pareciéndose este temperamento a una afinación pitagórica con la quinta del lobo entre MI y SI.<sup>7</sup>

Esta sería la descripción gráfica del temperamento supuesto:

<sup>7</sup> Se parecería mucho a un tipo de afinación pitagórica con la quinta del lobo desplazada para obtener algunas terceras 8las que atraviesan dicha quinta) prácticamente puras, y que pudo haber sido utilizada ya a principios del siglo XV (Goldáraz Gaínza, J.J. *Afinación y temperamento en la música occidental*, p.122.



Es decir, que si temperamos todas las quintas por igual, no tendremos la posibilidad de doble uso MIb/RE# y SOL#/LAb, a no ser que temperemos sólo ligeramente las quintas y a costa de una quinta MI-SI muy desafinada, lo que tampoco se ajusta al espíritu ni a la letra de la descripción de Nassarre.

### Temperamento irregular de las quintas

Con la esperanza de mejorar algo la quinta MI-SI, buscaremos una solución que consista en temperar de forma diferente las quintas que se afinan por encima del Sol y las que se afinan por debajo de éste. Hay que objetar de entrada

que Nassarre no especifica que unas quintas sean más temperadas que otras, es más, de su descripción parece desprenderse que todas ellas se temperan por igual.

Para las tres quintas SOL-RE-LA-MI podemos aplicar el razonamiento expuesto con anterioridad de que su temperamento debe estar entre 1/5 y 1/3 de coma para evitar que la quinta MI-SI suene demasiado desafinada. Pero supondremos ahora que las quintas SOL-DO-FA-SI-MI se temperan de modo diferente.

Es decir, seguiremos teniendo  $h_1=h_2=h_3$  (valor que llamaremos  $h$ ) con valor entre 4,57 y 8. Pero ensayaremos valores diferentes para  $h_4$ ,  $h_5$ ,  $h_6$  y  $h_7$ .

Volvamos a expresar el valor de las terceras SI-RE#(MIb) y LAb(SOL#)-DO, restando el valor de las notas extremas dadas por las expresiones [16] menos [24] y [13] menos [21], además de sumar  $Z$  pues hemos de subir una octava la nota del extremo, ahora con los valores  $h_i$  no degenerados, y sustituyendo  $h_1$ ,  $h_2$ , y  $h_3$  por  $h$ :

$$\text{SI-RE\#(MIb): } (3Z-3X+h_5+h_6+h_7)-(X-h_4+Y)=3Z-4X-Y+h_5+h_6+h_7-h_4= \\ = 406+h_5+h_6+h_7-h_4 \quad [43]$$

$$\text{LAB(SOL\#)-DO: } Z-(4X-h_1-h_2-h_3-h_4-2Z+Y)=3Z-4X-Y-3h-h_4=406-3h-h_4 \quad [44]$$

Queremos que estas terceras no excedan el valor de una tercera pitagórica (407,8 cents). En tal caso, tendremos las siguientes inecuaciones:

$$406+h_5+h_6+h_7-h_4 < 407,8 \quad [45]$$

$$406-3h-h_4 < 407,8 \quad [46]$$

Despejando en la segunda, tenemos que

$$h_4 > 3h-1,8 \quad [47]$$

Recordemos que  $h$  debe ser mayor que 4,57 (hemos supuesto para las cuatro primeras quintas el mismo resultado reflejado en la expresión [36]), lo que combinado con la inecuación anterior nos da el siguiente resultado<sup>8</sup>:

$$h_4 > 11,91 \quad [48]$$

Es decir, que para que la tercera LAb-DO sea menor que pitagórica, la quinta DO-SOL debe desviarse más de 11,91 cents de justa (aproximadamente 1/2 de coma), lo que es realmente un valor demasiado forzado para esta quinta.

<sup>8</sup> Habría que despejar  $h$  en [47],  $(h_4+1,8)/3 > h$ , que combinado con  $h > 4,57$  nos da  $(h_4+1,8)/3 > 4,57$ . Después despejamos otra vez  $h_4$  y obtenemos [48].

Recordemos además que no hemos modificado el semitono SOL-LAb (6 SOL-SOL#) respecto de la situación anterior (quintas iguales). Comencemos con su expresión matemática, obtenida de restar las expresiones [21] y [20]:

$$\text{SOL-LAb (SOL\#): } (4X-h_1-h_2-h_3-h_4-2Z+Y)-(X-h_4)=3X-2Z+Y-3h=92,3-3h \quad [49]$$

Recordemos el resultado obtenido en la inecuación [36]:  $4,57 < h < 8$ . Combinando esto con lo anterior obtenemos que el intervalo SOL-LAb (SOL#) oscilaría entre 41,13 y 68,3. Incluso el mayor de estos valores (que corresponde al caso extremo de emplear el valor máximo de 8 para el temperamento de las quintas) sería demasiado pequeño para un semitono. En efecto, hasta el pequeño semitono cromático ("incantable") del temperamento mesotónico es mayor: 76,20 cents. Quizás apurando al máximo el temperamento de las quintas sea soportable en ciertas figuraciones, aunque siempre tendrá un carácter agrio, que sólo tendría sentido con una intención expresiva o dramática. Quizás por esto no especifica Nassarre que se afine justa la Tercera DO-MI, para poder hacer más pequeñas (hasta 1/3 de coma) las quintas SOL-RE-LA-MI. Observemos que apurando el temperamento de estas quintas tendremos una mejor quinta MI-SI. En el caso de que estas tengan 7,3 cents menos que justa (aproximadamente 1/3 de coma), MI-SI sería una quinta justa.

Volvamos a la inecuación [45]. Despejando, tenemos que:

$$h_5+h_6+h_7-h_4 < 1,8. \quad [50]$$

Vamos a suponer igual el temperamento de las quintas DO-FA-SI-MIb, y le llamaremos  $h_j$ . Es decir,  $h_5=h_6=h_7=h_j$ . Sustituyendo y despejando, la inecuación [50] se convierte en:

$$h_j < (h_4+1,8)/3 \quad [51]$$

Así, vemos que el temperamento de estas quintas debe ser aproximadamente menor que la tercera parte del temperamento de la quinta DO-SOL, para que la tercera SI-RE#(MIb) no fuera mayor que una tercera pitagórica.

### Solución para RE# y LAb:

Si probamos con una quinta DO-SOL temperada de forma similar a la quintas SOL-RE-LA-MI, digamos unos 5 cents, tendríamos que deberíamos temperar las quintas DO-FA-SI-MIb menos que 2,3 cents (según [SI]). Es decir, se quedarían muy cercanas a puras (aproximadamente un "Schisma", cents). Así la tercera SI-RE# sería soportable. Sin embargo, es de suponer qu

Nassarre habría advertido el hecho de querer esas últimas quintas sensiblemente menos temperadas. Y es de señalar que en las pocas obras conocidas de Nassarre no aparece el RE#, y sí el LA.

Otra manera de plantear el problema: Suponemos que se temperan de forma diferente las quintas por encima de SOL y las quintas por debajo de SOL. Sean  $p$  y  $t$  las magnitudes de la desviación de las quintas por encima y por debajo de SOL respectivamente. Sea  $h$  la magnitud en la que la "quinta del lobo" se aparta de la quinta justa. Expresaremos la "tercera" LAB-DO como suma de quintas:

$$\text{SOL\#-DO: } (X-t)-Z+(X-t)+(X-t)-Z+(X-h)=4X-2Z-3t-h \quad [52]$$

Sustituyendo los valores de  $X$  y  $Z$  en la ecuación anterior:

$$\text{SOL\#-DO}=408-3t-h \quad [53]$$

Para que la tercera encajara en lo que nuestro oído puede admitir, digamos que esta tercera debe estar entre Justa (386 cents) y Pitagórica (407,8 cents).

$$386 < 408-3t-h < 408 \quad [54]$$

Restando 386 a cada miembro

$$0 < 22-3t-h < 22 \quad [55]$$

Sumando  $3t$  a cada miembro:

$$3t < 22-h < 22+3t \quad [56]$$

Restando 22 a cada miembro:

$$3t-22 < -h < 3t \quad [57]$$

multiplicando por  $-1$

$$22-3t > h > -3t \quad [58]$$

Si esta tercera fuera justa igualaríamos su magnitud, dada por la expresión [53], a 386:

$$408-3t-h=386 \quad [59]$$

Despejando:

$$t=7,3-h/3 \quad [60]$$

Si la tercera fuera pitagórica, haciendo un cálculo similar obtendríamos:

$$t=-h/3 \quad [61]$$

Como  $t$  no puede tener un valor negativo (eso significaría quintas más grandes que puras, lo que contradice las instrucciones de Nassarre),  $h$  debe ser negativo. Es decir, la quinta del lobo debería ser mayor que justa.

Para ver que le ocurre al LAB vamos a calcular la quinta del lobo (de acuerdo a la realización de este temperamento) como suma de quintas y una tercera:



Quinta del lobo:

$$\begin{aligned} \text{SOL\#-Mib} &= -Y+Z-(X-p)-(X-p)+Z-(X-p)-(X-t)+Z-(X-t)-(X-t)+Z-(X-t)+Z= \\ &= 700+3p+4t \quad [62] \end{aligned}$$

La desviación de ésta respecto de una quinta justa, que hemos llamado  $h$  será el resultado de restar la magnitud anterior a la de la quinta justa (700 cents), y obtendremos el siguiente valor:

$$h=2+3p+4t \quad [63]$$

Naturalmente, la quinta del lobo acumula la desafinación del resto de las quintas. Según esto, su desviación nunca podrá tomar un valor menor de  $t$  cents ( $t$  y  $p$  son siempre números positivos).

Queda descartado, por contradicción con [61], que podamos conseguir una tercera SOL#-DO pitagórica.

$$\text{SOL\#-DO Justa: } t_j=7,3-h/3 \quad [53]$$

$$\text{SOL\#-DO Pitagórica: } t_p=-h/3 \quad [54]$$

Sustituyendo el valor hallado para  $h$ :

$$t_j=7,3-(2+3p+4t)/3 \quad [66]$$

$$t_p=-(2+3p+4t)/3 \quad [67]$$



Despejando,

$$t_j = 2,8 - 0,4p \quad [68]$$

$$t_p = -0,3 - 0,4p \quad [69]$$

Nunca se podrá cumplir la segunda de estas ecuaciones [69], puesto que ambos  $t$  y  $p$  deben ser números positivos (de lo contrario habría quintas más grandes que puras, lo que contradice las instrucciones de Nassarre). En cuanto a la primera [68], para que  $t$  sea mayor que cero,  $p < 7$ . Además, no deberá bajar por debajo de 4,57<sup>9</sup>, en cuyo caso  $t=0,8$ . Es decir, las cuatro quintas por debajo de Sol deberían estar entre 0 y 0,8 cents. Nuevamente encontramos un resultado inaceptable: Un temperamento de 0,8 cents equivale prácticamente a dejar las quintas justas, además insistimos en que Nassarre no dice nada de temperar estas quintas de forma desigual.

### Conclusiones:

Pablo Nassarre, en su *Escuela Musica*, describe una manera de temperar los instrumentos de tecla. Considerando los límites en los que, según sus instrucciones, se movería dicho temperamento, hemos estudiado de forma matemática las posibilidades que ofrece, especialmente si se puede obtener una solución para el doble uso de las teclas RE#-MI $\flat$  Y SOL#-LA $\flat$ .

Tras este estudio, apreciamos que

a) Si temperamos las quintas SOL-RE, RE-LA, LA-MI, SOL-DO, DO-FA, FA-SI $\flat$  y SI $\flat$ -MI $\flat$  por igual, la magnitud de este temperamento se debe situar entre 1/3 y 1/5 de coma, de lo contrario obtendríamos una quinta MI-SI muy desafinada (más de 1/3 de coma).

b) Una solución trivial sería el temperamento mesotónico clásico de terceras mayores puras y quintas temperadas 1/4 de coma. Sin embargo, aunque dicho temperamento entraría dentro de los límites que marcan las instrucciones de Nassarre, no parece ser el que el fraile aragonés tenía en mente, pues él sólo afina cuatro terceras puras.

c) Si quisiéramos (siempre con quintas temperadas por igual) que las terceras LA $\flat$ -DO y SI-RE# fueran útiles (que no excedieran de una tercera pitagórica) matemáticamente habría que temperar las quintas sólo imperceptiblemente (0,65 Cents), lo que en la práctica equivale a dejarlas puras. Se obtendría una quinta MI-SI muy desafinada. El resultado es prácticamente

<sup>9</sup> Recordemos que en virtud de la expresión (35),  $p$  debe ser mayor que 4,57 si queremos una quinta MI-SI soportable.

una afinación pitagórica con la quinta del lobo trasladada a MI-SI, afinación que podría haber sido empleada en el siglo XV, y que no parece ser la que Nassarre haya querido describir.

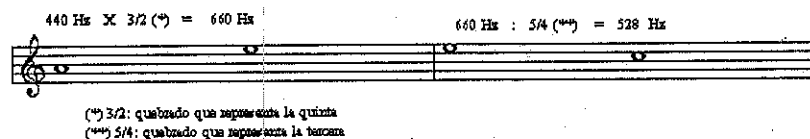
d) Intentando temperar de forma diferente las quintas por encima del SOL y las quintas por debajo del SOL, se obtiene alguna posibilidad de tener las notas buscadas. Concretamente, podemos obtener una tercera LA $\flat$ -DO al menos no más grande que pitagórica a costa de temperar media coma la quinta DO-SOL. En cualquier caso, Nassarre no parece dar instrucciones para temperar de forma desigual las quintas, y dice "abaxar un poquito, de modo que no fea notable", lo que no concordaría con tal de safinación para esa quinta.

e) Se podría obtener una tercera SI-RE# soportable temperando la quinta SOL-DO unos 5 cents, y las quintas DO-FA-SI $\flat$ -MI $\flat$  aproximadamente 1 cent (un "Schisma"). Sin embargo, es de suponer que Nassarre habría advertido el hecho de querer esas últimas quintas sensiblemente menos temperadas. Y es de señalar que en las pocas obras conocidas de Nassarre no aparece el RE#, y sí el LA $\flat$ .

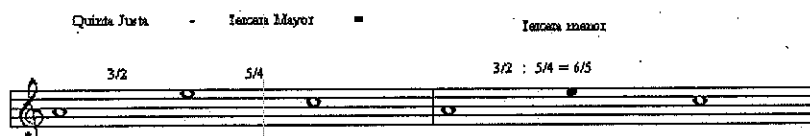
Como conclusión final obtenemos que inútilmente hemos buscado la posibilidad de que el temperamento de Nassarre permita la enharmonía para las notas RE#/MI $\flat$  y SOL#/LA $\flat$ . Esto corrobora de forma matemática lo que seguramente habrán experimentado de forma práctica los clavecinistas que hayan intentado afinar sus instrumentos siguiendo las instrucciones de Nassarre: El temperamento de Nassarre quedaría en los límites de un temperamento mesotónico clásico, aunque sin la preocupación por tener el máximo de terceras puras.

### Apéndice: Medida de los intervalos en "Cents"

Los intervalos musicales (es decir, la diferencia de entonación entre dos notas) se pueden expresar por quebrados que indican el cociente entre las frecuencias de ambas notas. Así, el oído del músico sabe reconocer la distancia entre dos notas cuyas frecuencias tienen una relación 2:1 como una octava. Si la relación de frecuencias es 3:2 la reconoce el oído como una quinta, etc. Así si tenemos dos notas, el intervalo entre ambas lo podemos expresar por un quebrado formado por el cociente entre las frecuencias simplificado. Recíprocamente, multiplicando la frecuencia de la primera nota por el quebrado correspondiente, obtenemos la frecuencia de la segunda, si el intervalo es ascendente. (Si es descendente deberemos dividir por dicho quebrado).



Para obtener el quebrado correspondiente a la suma de dos intervalos, multiplicaremos los quebrados correspondientes si los intervalos son ascendentes, o dividiremos si son descendentes.



Hay una manera más sencilla de realizar estos cálculos, y es medir los intervalos en *cents*. El valor de un intervalo en *cents* se define del modo siguiente:

Valor del intervalo expresado por el quebrado  $p$ :  $1200 \times \log(p) / \log(2)$

Este valor es definido artificialmente de este modo porque así la octava tendrá un valor de 1200 cents, y el semitono del temperamento igual valdrá 100 cents. Obtenemos así números cómodos y fáciles de interpretar.

Pero además hay otra ventaja. Debido a que el logaritmo de un producto es igual a la suma de logaritmos ( $\log(A \cdot B) = \log A + \log B$ ), se puede demostrar que la suma de dos intervalos se expresa por la suma o diferencia, según sea ascendente o descendente, de los cents que vale cada uno de los intervalos. Esto facilita los cálculos, al ser mucho más cómodo trabajar con sumas que con productos.

